KERN
WISKUNDE

VWO C
LEERJAAR 6

METHODECONCEPT / REDACTIE

Boom voortgezet onderwijs

AUTEURS

Benjamin del Canho
Gijs Langenkamp
Erik Leppen
Sibren Stienstra
Vera de Visser-Lagas

KERN WISKUNDE

VWO C
LEERJAAR 6

BOOM VOORTGEZET ONDERWIJS

ISBN 978 94 6442 200 9
www.boomvoortgezetonderwijs.nl

KERN Wiskunde is een RTTI-gecertificeerde methode en onderscheidt vier soorten vragen:

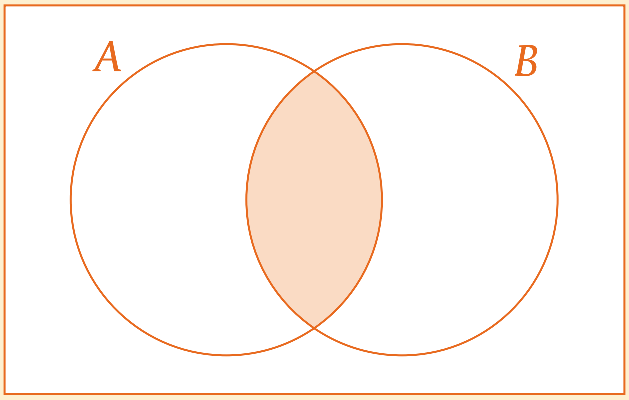
R Reproductievragen
T1 Trainingsgerichte toepassingsvragen
T2 Transfergerichte toepassingsvragen
I Inzichtvragen

Voor meer informatie over de RTTI-systematiek, zie www.docentplus.nl.

Omslag
René van der Vooren, Amsterdam

Opmaak & technische tekeningen
Integra Software Services, India

Inhoud


A
B

13

Logica

Zoals je in de algebra rekent met getallen, reken je in de logica met beweringen. Daarbij vertaal je zinnen naar formules, kun je rekenen met deze formules en schrijf je het resultaat weer als gewone zin. Je kunt in formules uitdrukken dat een bewering uit een andere volgt en daar een tabel bij maken. Je leert hoe je kunt redeneren met beweringen, ook als ze onwaar zijn. Je leert waarom een paradox iets anders is dan een onware bewering, en hoe je puzzels met waarheidssprekers en leugenaars oplost.

ACADEMIE

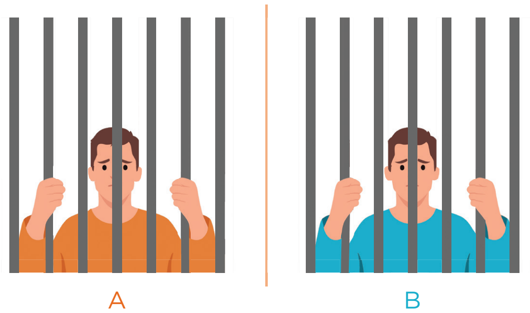
DOEL → *Je maakt kennis met het gevangenendilemma, een belangrijk onderdeel van de speltheorie.*

Speltheorie

Het gevangenendilemma Stel dat twee verdachten worden gearresteerd op verdenking van een misdrijf. Ze worden van elkaar gescheiden en afzonderlijk ondervraagd. De politie heeft te weinig bewijs om ze allebei zwaar te straffen, maar doet elk van hen een voorstel:

- Als één verdachte bekent en de ander zwijgt, dan wordt de bekentenis beloond: de verdachte die bekent gaat vrijuit, terwijl de ander 10 jaar gevangenisstraf krijgt.
- Als beide verdachten bekennen, dan krijgen ze ieder 5 jaar cel.
- Als geen van beiden bekent, dan kunnen ze slechts veroordeeld worden voor een klein vergrijp, waarvoor ze ieder 1 jaar krijgen.

Beide verdachten staan voor dezelfde keuze, maar mogen niet met elkaar overleggen. Wat is nu de beste beslissing: zwijgen of bekennen? Deze situatie staat bekend als het *gevangenendilemma*, en laat zien hoe individuele keuzes soms kunnen leiden tot een slechter gezamenlijk resultaat.



Twee verdachten, A en B, krijgen los van elkaar de keuze voor zwijgen of bekennen.

Analyse Je kunt het gevangenendilemma analyseren met de kruistabel hieronder. Bij elke combinatie van bekennen of zwijgen zet je de uitkomsten (a, b) voor beide verdachten A en B.

		verdachte B	
		zwijgen	bekennen
verdachte A	zwijgen	$(-1, -1)$	$(-10, 0)$
	bekennen	$(0, -10)$	$(-5, -5)$

Elke verdachte heeft twee opties: zwijgen of bekennen. De gevolgen hangen niet alleen af van de eigen keuze, maar ook van wat de ander doet. Bekijk de mogelijkheden vanuit het perspectief van één verdachte.

- Als de ander zwijgt, is het beter om zelf te bekennen, want dan kom je vrij in plaats van 1 jaar cel te krijgen.
- Als de ander bekent, is het nog steeds beter om ook te bekennen, want dan krijg je 5 jaar cel in plaats van 10.

In beide gevallen levert bekennen dus een betere uitkomst op dan zwijgen. Dat maakt bekennen een *dominante strategie*: het is altijd de beste keuze, ongeacht wat de ander doet. Het bijzondere is dat dit voor beide verdachten geldt. Als ze allebei rationeel denken, zullen ze dus allebei bekennen, en elk 5 jaar cel krijgen. Dit leidt tot een *Nash-evenwicht*: geen van beide gevangenen wil zijn keuze veranderen, omdat hij er niet beter van wordt als de ander bij zijn keuze blijft. In het gevangenendilemma is het Nash-evenwicht dus dat beide verdachten bekennen. Toch zou het voor hen beiden beter zijn als ze allebei zouden zwijgen, want dan krijgen ze beide maar 1 jaar gevangenisstraf.

Speltheorie Het gevangenendilemma is een voorbeeld uit de speltheorie. Dit is een vrij jonge tak van de wiskunde waarin het nemen van beslissingen wordt bestudeerd in situaties waarin meerdere personen of partijen betrokken zijn. In zo'n situatie, een *spel* genoemd, beïnvloedt de keuze van de één de uitkomst voor de ander. Speltheoretici onderzoeken wat rationele spelers zouden moeten doen om een zo goed mogelijk resultaat te behalen, rekening houdend met wat de andere spelers doen. Daarbij wordt vaak aangenomen dat alle spelers logisch nadenken en voor zichzelf kiezen.

Speltheorie heeft toepassingen in de economie, de biologie, de politiek, de psychologie, en zelfs in alledaagse situaties zoals het maken van afspraken of het kiezen van een rij op de luchthaven.

Je kijkt: welke rij lijkt het kortst? Maar je denkt: "Misschien is deze het kortst omdat anderen al hebben gezien dat hij niet opschiet..." Je kiest dan een langere rij, in de hoop dat die sneller is.

Tit for tat Als je het gevangenendilemma één keer speelt, kun je straffeloos kiezen voor verraad (bekennen). Maar in werkelijkheid komen dergelijke situaties vaak meerdere keren na elkaar terug. Spelers onthouden wat de ander de vorige keren deed en wegen dit mee in hun keuze. Als je kiest voor samenwerken (zwijgen), gaat de ander je meer vertrouwen, en dan zal die ook vaker kiezen voor samenwerken. Zo kun je het Nash-evenwicht vermijden.

Stel dat twee spelers het gevangenendilemma vijf keer achter elkaar spelen. In elke ronde kunnen ze kiezen tussen samenwerken of verraden. Het spel kan als volgt verlopen:

	ronde					
	1	2	3	4	5	eindstand
	−1	−10	0	−5	−10	
A	○	○	×	×	○	−26
B	○	×	○	×	×	−16
	−1	0	−10	−5	0	

○ = samenwerken
× = verraden

Spelers kunnen verschillende *strategieën* kiezen. Enkele strategieën zijn:

- *altijd samenwerken*
  Je kunt optimaal scoren (0 punten), maar de ander kan dit heel makkelijk misbruiken.
- *altijd verraden*
  Je kunt niet verliezen, maar je scoort slecht.
- *willekeurig*
  Je gooit elke beurt een muntje op.
- *samenwerken, totdat de ander verraadt; vanaf dat moment altijd verraden*
  Je straft verraad keihard af.
- *begin met samenwerken; daarna doe je steeds wat de ander de vorige keer deed*
  Je bent welwillend, maar laat niet over je heen lopen.

De laatste strategie heet ook wel *tit for tat*. Dit kun je in het Nederlands vertalen als 'oog om oog, tand om tand' of 'voor wat hoort wat'. Deze strategie blijkt erg succesvol en kom je daarom veel tegen in het dierenrijk.

1 Speel het gevangenendilemma één keer met een klasgenoot. Bedenk of je kiest voor zwijgen of bekennen. Beschrijf welke overweging je hebt gemaakt en hoe die heeft uitgepakt. T1

2 In de finale van het tv-programma *De Verraders* mogen de finalisten de schat verdelen. Elke deelnemer kiest voor *trouw* of *verraad* en de schat wordt als volgt verdeeld:

- Als iedereen trouw is, wordt de schat eerlijk verdeeld.
- Als één persoon verraadt, krijgt die alles en de rest niets.
- Als meer personen verraden, krijgt niemand iets.

In seizoen 1 speelden twee deelnemers de finale. De schat bestond uit 22 zilverstaven.

a Leg uit dat deze finale lijkt op het gevangenendilemma. T2
b Maak een tabel met alle mogelijke uitkomsten. T1
c Leg uit of er een dominante strategie is. T2

Uiteindelijk kozen beide finalisten voor ‘trouw’ en mochten ze de zilverschat dus delen.

d Geef een mogelijke reden voor deze keuze. T2
e Als er drie finalisten waren geweest, hoeveel mogelijke uitkomsten waren er dan geweest? Noteer systematisch al deze uitkomsten. T2

3 **a** Speel met een klasgenoot het gevangenendilemma. Kies elk één strategie en speel vijf rondes. Herhaal dit een aantal keer met verschillende strategieën. Bespreek welke strategieën goed werken tegen welke andere strategieën. T1
b Bedenk een strategie en speel zelf deze strategie uit tegen *tit for tat* gedurende vijf rondes. Lukt het om van *tit for tat* te winnen? T2

4 Twee concurrerende bedrijven A en B moeten beslissen of ze de prijs van hun product gaan verlagen. De keuze en de bijbehorende winst zie je in de tabel hieronder.

		bedrijf B	
		niet	wel
bedrijf A	niet	(4500, 4500)	(1500, 8000)
	wel	(8000, 1500)	(5000, 5000)

a Wat is hier het Nash-evenwicht? T2
b Leg uit of deze situatie vergelijkbaar is met het gevangenendilemma. I

Heb je het leerdoel bereikt?

R Ik ken de betekenis van de volgende begrippen:
- gevangenendilemma
- strategie en dominante strategie
- Nash-evenwicht
- spel
- tit for tat

T1 Ik kan uitleggen wat het gevangenendilemma is en een tabel maken met alle mogelijke uitkomsten.
T2 Ik kan aangeven wat een dominante strategie is en wat een Nash-evenwicht is, en ik kan in andere situaties het gevangenendilemma herkennen.
I Ik kan redeneren over het gevangenendilemma.