



Mechanica

*Statisch onbepaalde constructies
en bezwijkanalyse*

COENRAAD HARTSUIJKER, HANS WELLEMAN



Mechanica

Statisch onbepaalde constructies en Bezwijkanalyse

Coenraad Hartsuijker

Hans Welleman



Meer informatie over deze en andere uitgaven kunt u verkrijgen bij:

BIM Media B.V.

Postbus 16262

2500 BG Den Haag

tel.: (070) 304 67 77

www.bimmedia.nl

Op het gebied van mechanica en sterkteleer zijn bij Academic Service de volgende uitgaven beschikbaar:

- C. Hartsuijker/*Mechanica: Evenwicht*
- C. Hartsuijker/*Mechanica: Spanningen, vervormingen verplaatsingen*
- C. Hartsuijker & J.W. Welleman/*Mechanica: Statisch onbepaalde constructies en Bezwijkanalyse*

© 2004, 2013 BIM Media, Den Haag

Academic Service is een imprint van BIM Media B.V.

Zetwerk: TrendsCo., Goes

Omslagontwerp: Studio Bassa, Culemborg

Omslaguitvoering: Carlito's Design, Amsterdam

ISBN 978 90 395 2752 8

NUR 123/929

Alle rechten voorbehouden. Alle intellectuele eigendomsrechten, zoals auteurs- en databankrechten, ten aanzien van deze uitgave worden uitdrukkelijk voorbehouden. Deze rechten berusten bij BIM Media B.V. en de auteur.

Behoudens de in of krachtens de Auteurswet gestelde uitzonderingen, mag niets uit deze uitgave worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand of openbaar gemaakt in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen of enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Voor zover het maken van reprografische verveelvoudigingen uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16 h Auteurswet, dient men de daarvoor wettelijk verschuldigde vergoedingen te voldoen aan de Stichting Reprorecht (Postbus 3051, 2130 KB Hoofddorp, www.reprorecht.nl). Voor het overnemen van gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet) dient men zich te wenden tot de Stichting PRO (Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie, Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.cedar.nl/pro). Voor het overnemen van een gedeelte van deze uitgave ten behoeve van commerciële doeleinden dient men zich te wenden tot de uitgever.

Hoewel aan de totstandkoming van deze uitgave de uiterste zorg is besteed, kan voor de afwezigheid van eventuele (druk)fouten en onvolledigheden niet worden ingestaan en aanvaarden de auteur(s), redacteur(en) en uitgever deswege geen aansprakelijkheid voor de gevolgen van eventueel voorkomende fouten en onvolledigheden.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the publisher's prior consent.

While every effort has been made to ensure the reliability of the information presented in this publication, BIM Media B.V. neither guarantees the accuracy of the data contained herein nor accepts responsibility for errors or omissions or their consequences.

Woord vooraf van de uitgever

Dit boek is het derde deel uit een serie leerboeken *Mechanica*, waarin een helder en compleet beeld wordt gegeven van de theorie en toepassingen van de mechanica van constructies in de Bouwkunde en de Civiele Techniek (Weg- en Waterbouwkunde).

De serie bestaat uit drie delen:

- Mechanica: Evenwicht
- Mechanica: Spanningen, vervormingen, verplaatsingen
- Mechanica: Statisch onbepaalde constructies en Bezwijkanalyse

De serie is gebaseerd op de dictaten die ontwikkeld zijn aan de faculteit Civiele Techniek (tegenwoordig Civiele Techniek en Geowetenschappen) van de Technische Universiteit te Delft. De inhoud van deze dictaten is het resultaat van jarenlange ervaring met het mechanicaonderwijs aan de TU Delft en het commentaar van vele collega's in de onderwijssector en generaties studenten. Deze dictaten hebben binnen én buiten de TU Delft een goede reputatie. Bovendien hebben vele docenten mechanica van de jongere generatie het mechanica vak tijdens hun opleiding bestudeerd aan de hand van deze dictaten. Mede daardoor worden deze dictaten al aan enkele HTO-opleidingen gebruikt.

Bij de opzet is gezocht naar een fundamentele aanpak zonder daarbij de relatie met de bouwpraktijk te verliezen. Het grote aantal uitgewerkte voorbeelden in de tekst, alsmede de vele vraagstukken aan het einde van ieder hoofdstuk maken van ieder boek een belangrijk hulpmiddel bij het bestuderen en oefenen van het vak Toegepaste Mechanica.

De uitgever

Woord vooraf van de auteurs

In het eerste deel van de serie *Mechanica* wordt onder meer aangegeven hoe men in statische bepaalde staafconstructies de oplegreacties en sneedkrachten kan berekenen uit het *Evenwicht*. Het tweede deel bouwt hierop verder met een onderzoek naar het gedrag van staven en staafconstructies voor wat betreft de *Spanningen*, *Vervormingen*, *Verplaatsingen*.

Dit derde deel is opgebouwd uit drie modules waarin drie min of meer op zichzelf staande onderwerpen worden behandeld:

- Module 1 – *Statische onbepaalde constructies*
- Module 2 – *Bezwijkanalyse*
- Module 3 – *Symmetrie*

De behandeling blijft beperkt tot staafconstructies en handberekeningsmethoden.

Module 1 – *Statisch onbepaalde constructies*

Voor de berekening van de krachtsverdeling in statisch onbepaalde constructies zijn de *evenwichtsbetrekkingen* niet meer toereikend, maar moet ook de vervorming van de constructie in de beschouwing worden betrokken. Deze moet het materiaalgedrag volgen (de *constitutieve betrekkingen*) en moet verder in overeenstemming zijn met de samenhang in de constructie en de bewegingsvrijheid in de opleggingen (de *kinematische betrekkingen*). Bij de berekening van statisch onbepaalde constructies worden de evenwichtsbetrekkingen uit deel 1 gecombineerd met de constitutieve en kinematische betrekkingen uit deel 2.

Afhankelijk van de volgorde waarin de drie genoemde typen betrekkingen in de berekening aan de orde komen kunnen drie verschillende groepen van berekeningsmethoden worden onderscheiden:

- *krachtenmethoden*
- *verplaatsingenmethoden*
- *hybride of gemengde methoden*

De drie methoden worden geïllustreerd aan de hand van voorbeelden. Bij op buiging belaste staafconstructies blijken de zogenaamde *hoekveranderingsvergelijkingen* vaak een aantrekkelijke handberekeningsmethode; voor constructies met niet-verplaatsbare knooppunten (geschoorde constructies) is dit een krachtenmethode en voor constructies met verplaatsbare knopen (ongeschoorde constructies) een hybride methode.

Door slim te werk te gaan is het met de krachtenmethode vaak mogelijk het rekenwerk te vereenvoudigen, wat aantrekkelijk is in het geval van een handberekening. De graad van statisch onbepaaldheid is in de voorbeelden bewust laag gehouden. Het gaat hier om het verwerven van inzicht in het gedrag van statisch onbepaalde constructies.

Voor complexe constructies leent zich de meer de systematische aanpak van de verplaatsingenmethode die bij uitstek geschikt is om te programmeren.

De opzet van de *eindige elementenmethode*, een op computertoepassingen toegesneden verplaatsingenmethode, wordt geïllustreerd aan de hand van een op buiging belasting constructie waarvan de knooppunten alleen maar kunnen roteren.

Anders dan bij statisch bepaalde constructies wordt de krachtsverdeling in statisch onbepaalde constructies beïnvloed door *stijfheidsverschillen*, *zettingen* en *temperatuurinvloeden*. Ook deze onderwerpen komen aan de orde.

Verder is de *stijfheid van de knoopverbindingen* in een statisch onbepaalde constructie van invloed op de krachtsverdeling. Tot nu toe werd altijd gewerkt met oneindig stijve knoopverbindingen. Aan het einde van de module wordt aangegeven hoe men de krachtsverdeling ook kan berekenen voor een constructie met *verende knoopverbindingen*.

Module 2 – Bezwijkanalyse

In de bezwijkanalyse neemt men aan dat de constructie door voortschrijdende *plastische vervormingen* geleidelijk verandert in een mechanisme waardoor bezwijken optreedt. De belasting waarbij het *bezwijkmechanisme* ontstaat noemt men de *bezwijkbelasting*. Het bereiken van de vloeispanning betekent in de meeste gevallen nog lang niet het bezwijken van de constructie. Dit wordt in eerste instantie geïllustreerd aan de hand van een blok opgehangen aan een aantal (op extensie belaste) draden.

Hierna wordt onderzocht hoe het plastisch gedrag zich manifesteert in een op buiging belaste doorsnede (alle vezels hierin worden op extensie belast). Voor een rechthoekige doorsnede wordt het verband tussen moment en kromming afgeleid, resulterend in een *moment-kromming-diagram*. Verder komen aan de orde het *volplastisch moment* van de doorsnede, de *vormfactor* als een maat voor de reservesterkte (reserv capaciteit) van de doorsnede direct na het bereiken van de vloeispanning, en de *halveringslijn*.

Vervolgens wordt van de doorsnede overgestapt naar de ligger als een verzameling van opeenvolgende doorsneden. Er wordt ingegaan op de ontwikkeling van een *volplastisch scharnier*, het ontstaan van een *bezwijkmechanisme* en de *herverdeling van krachten* in statisch onbepaalde liggers.

Voor het berekenen van de bezwijkbelasting kan men gebruik maken van een *bovengrensbepaling*, een aanpak die bekend staat als de *arbeidsmethode*. Bij deze methode dient men een goed inzicht te hebben in de *kinematica van het bezwijkmechanisme* en de toepassing van het beginsel van *virtuele arbeid*. De werkwijze wordt geïllustreerd aan de hand van een aantal liggers, portalen en raamwerken.

Ten slotte wordt kort ingegaan op de berekening van de bezwijkbelasting met een *ondergrensbepaling*.

dering, een aanpak die bekend staat als de *evenwichtsmethode*.

Module 3 – *Symmetrie*

Bij symmetrische constructies kan men de berekening vaak vereenvoudigen door gebruik te maken van symmetrie-eigenschappen. In deze module worden de verschillende *soorten symmetrie* benoemd en worden ze geïllustreerd aan de hand van een aantal ruimtelijke en vlakke staafconstructies.

Met betrekking tot de belasting wordt het onderscheid ingevoerd tussen een *co-symmetrische belasting* en een *contra-symmetrische belasting*.

Vervolgens wordt ingegaan op de *symmetrie-eigenschappen* van krachtsverdeling en vervormingstoestand in het geval van een symmetrische constructie met symmetrische belasting. De module sluit af met een aantal voorbeelden waarbij voor het berekenen van de constructie gebruik gemaakt wordt van symmetrie-eigenschappen. De voorbeelden blijven beperkt tot in hun vlak belaste vlakke staafconstructies.

De tekst wordt in alle drie de modules ondersteund door een zeer groot aantal figuren en is zo opgeschreven dat studenten zich de lesstof in principe zelfstandig eigen kunnen maken. Het boek zal echter nooit de docent kunnen vervangen. In het onderwijsproces is de docent een onmisbare katalysator. Door de docent kan het proces, gericht op het verwerven van kennis, inzicht en vaardigheid, in belangrijke mate worden versneld. Zo zou de docent aan de hand van de figuren uit het boek het verhaal in grote lijnen kunnen vertellen, waarna de student een en ander nog eens zelf kan nalezen – en dan blijkt dat vaak veel gemakkelijker en sneller te gaan dan men in eerste instantie zou verwachten. Maar ook andere werkwijzen zijn denkbaar.

Ondanks de hiervoor beschreven en welbewust gekozen opbouw van het boek zijn er voldoende mogelijkheden om zonder problemen bepaalde delen over te slaan als het onderwijsprogramma daar om vraagt of als de docent dat wenselijk acht. Daarnaast biedt het grote aantal vraagstukken de docent de gelegenheid een eigen aanvullende onderwijsstrategie te ontwikkelen.

Onder de vraagstukken bevinden zich kleine opgaven die zich bij uitstek lenen voor oefening in groepsverband, tijdens de les. De grotere vraagstukken, meestal opgesplitst in deelvragen, zijn eerder bedoeld als opdrachten die individueel of in kleine groepjes moeten worden uitgevoerd. Samenwerking tussen de studenten dient daarbij te worden aangemoedigd: het aan elkaar vertellen wat je *niet* begrijpt is net zo leerzaam als het aan elkaar vertellen wat je *wel* begrijpt. Bovendien wordt de student zo uitgedaagd zelf te ontdekken dat er vaak meerdere wegen kunnen zijn die tot het gevraagde resultaat leiden.

Een beter inzicht en grotere vaardigheid zijn alleen te bereiken door veel en regelmatig te oefenen. Voor een goede afstemming en dosering is ook hier weer de hand van de meester nodig: de docent.

Onze dank gaat uit naar Prof. ir. D. Dicke voor het beschikbaar stellen van een vraagstukkenverzameling waar wij vrijmoedig gebruik van hebben gemaakt, en naar onze collega's ir. Charles Vrijman en dr. ir. Harm Askes.

Nootdorp / herfst 2004
Den Hoorn

C. Hartsuijker
J.W. Welleman

Inhoud

Module 1 - Statisch onbepaalde constructies

1 Inleiding 1

2 Krachtenmethode 7

- 2.1 Opzet van de berekening 7
- 2.2 Voorbeelden van de krachtenmethode 8
- 2.3 Vraagstukken 43

3 Hoekveranderingsvergelijkingen 55

- 3.1 Hoekveranderingsvergelijkingen voor constructies met niet-verplaatsbare knooppunten 57
- 3.2 Kinematica van een mechanisme en virtuele arbeid 74
- 3.3 Hoekveranderingsvergelijkingen voor constructies met verplaatsbare knooppunten 83
- 3.4 Vraagstukken 101

4 Verplaatsingsmethode 117

- 4.1 Opzet van de berekening 117
- 4.2 De differentiaalvergelijking 118
- 4.3 Voorbeelden van de verplaatsingsmethode 120
- 4.4 Berekening van een paalfundering 131
- 4.5 Vraagstukken 140

5 Eindige-elementenmethode 153

- 5.1 Notaties en tekenafspraken 154
- 5.2 Opzet van de berekening 156
- 5.3 Elementstijfheidsmatrix 158
- 5.4 Systeemstijfheidsmatrix 161
- 5.5 Oplossingsfase 165
- 5.6 Voorgescreven verplaatsingen 171
- 5.7 Elementbelastingen 177
- 5.8 Vraagstukken 185

6 Steunpuntszettingen en temperatuurinvloeden 191

- 6.1 Steunpuntszettingen 192
- 6.2 Temperatuurinvloeden 202
- 6.3 Vraagstukken 218

7 Invloed van stijfheidsverschillen 229

- 7.1 Stijfheidsverschillen binnen een staaf 231
- 7.2 Stijfheidsverschillen tussen staven 237

8 Verende verbindingen 247

- 8.1 De hoekveranderingsvergelijking in een verende verbinding 247
- 8.2 Statisch bepaalde constructies 249
- 8.3 Statisch onbepaalde constructies 254

Module 2 - Bezwijkanalyse

1 Inleiding 261

- 1.1 Materiaalgedrag 261
- 1.2 Beoordeling constructiegedrag 262
- 1.3 Bezwijkanalyse 262
- 1.4 Toepasbaarheid 263

2 Elastisch of plastisch rekenen – blok opgehangen aan draden 265

- 2.1 Blok opgehangen aan draden; algemene gegevens 265
- 2.2 Blok opgehangen aan twee draden 266
- 2.3 Blok opgehangen aan drie draden 267
- 2.4 Een veilige ophanging 270
- 2.5 Voorlopige conclusies 271
- 2.6 Vraagstukken 272

3	Elasto-plastisch gedrag van een op buiging belaste doorsnede	275	7	De evenwichtsmethode – een ondergrensbenadering	365
3.1	Betrekking tussen buigend moment en kromming	275	7.1	Spelen met momentenlijnen	366
3.2	Berekening vormfactor	282	7.2	Vraagstukken	371
3.3	Halveringslijn	290		Module 3 - Symmetrie	
3.4	Vraagstukken	294	1	Inleiding	375
4	Elasto-plastisch gedrag van een ligger	297	2	Symmetrische constructies	377
4.1	Ontwikkeling van een volplastisch scharnier	297	3	Symmetrische belastingen	383
4.2	Herverdeling van krachten	301	4	Invloed van de symmetrie op krachtsverdeling en vervormingstoestand	385
5	Bezwijkbelasting van een ligger – bovengrensbepaling	313	5	Toepassingen	387
5.1	Aanpak op basis van het bezwijkmechanisme	313	6	Vraagstukken	399
5.2	De bezwijkbelasting berekend met evenwichtsvergelijkingen	316		Formules	405
5.3	De bezwijkbelasting berekend met virtuele arbeid	320		Trefwoordenregister	411
5.4	Vraagstukken	328			
6	Bezwijkanalyse van raamwerken - bovengrensbepaling	331			
6.1	Uitgewerkte rekenvoorbeelden	332			
6.2	Elementaire bezwijkmechanismen	352			
6.3	Vraagstukken	355			

Module 1 – Statisch onbepaalde constructies

1

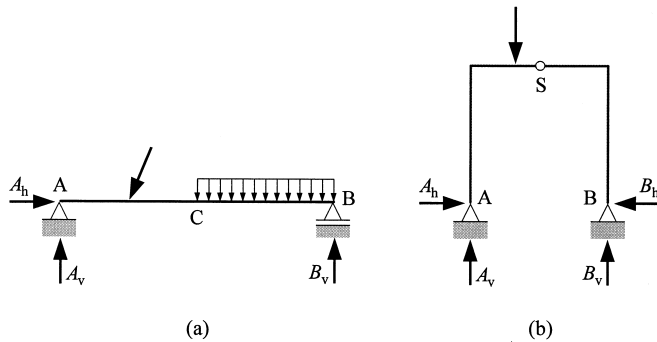
Inleiding

Bij *statisch bepaalde constructies* kan de krachtsverdeling¹ direct uit het evenwicht worden afgeleid, zie figuur 1.1.

Bij *statisch onbepaalde constructies* is dat niet mogelijk: de evenwichtsvergelijkingen zijn niet meer toereikend om alle onbekende oplegreacties en snedekrachten te kunnen berekenen, zie figuur 1.2. Het aantal onbekenden blijkt groter dan het beschikbare aantal evenwichtsvergelijkingen. In dat geval zijn er oneindig veel oplossingen (krachtsverdelingen) die voldoen aan het evenwicht. De oplossing is nu niet eenduidig, maar *onbepaald*.

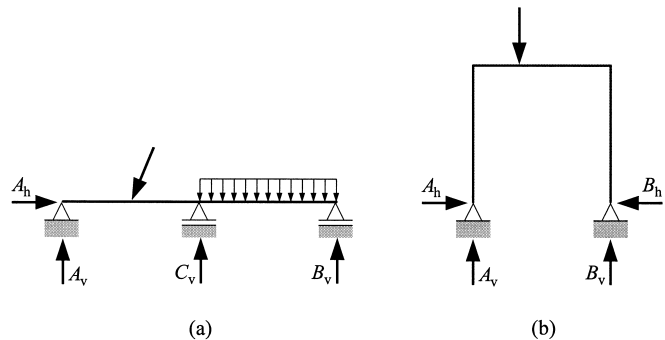
Om bij statisch onbepaalde constructies uit te vinden welke van al deze krachtsverdelingen de juiste is moet ook de *vervorming van de constructie* in de beschouwing worden betrokken.

De vervorming moet uiteraard het *materiaalgedrag* volgen (*constitutieve voorwaarden*) en verder moet de vervorming in overeenstemming zijn met de *samenhang in de constructie en de bewegingsvrijheid in de opleggingen* (*kinematische voorwaarden*).



Figuur 1.1 Statisch bepaalde constructies: (a) vrij opgelegde ligger en (b) driescharnierenspan. Oplegreacties en krachtsverdeling kunnen rechtstreeks uit het evenwicht worden gevonden en zijn onafhankelijk van de stijfheidsverhoudingen.

¹ Onder krachtsverdeling wordt verstaan het totaal aan oplegreacties en snedekrachten, of anders gezegd, de verzameling van afhankelijk veranderlijke krachtengrootheden.

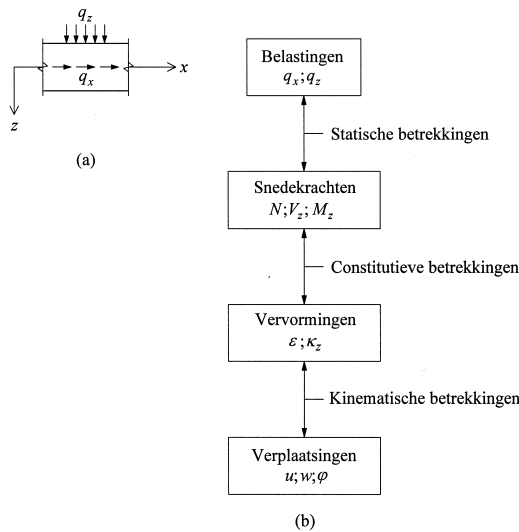


Figuur 1.2 Statisch onbepaalde constructies: (a) over drie steunpunten doorgaande ligger en (b) tweescharnieren-spant. Voor het berekenen van de oplegreacties en snedekrachten zijn de evenwichtsvergelijkingen niet meer toereikend. Ook de vervorming van de constructie moet in de beschouwing worden betrokken. De krachtsverdeling wordt beïnvloed door de stijfheidsverhoudingen.

Om de juiste krachtsverdeling bij statisch onbepaalde constructies te kunnen vinden zijn er naast het evenwicht dus extra voorwaarden waaraan moet worden voldaan. Voor het berekenen van de krachtsverdeling in statisch onbepaalde constructies staan dan ook de volgende *drie typen betrekkingen*¹ ter beschikking:

- a. de *statische betrekkingen*; zij geven betrekkingen tussen krachtengrootheden;
- b. de *constitutieve betrekkingen*; zij zijn afgeleid uit het materiaalgedrag, gegeven door de spanning-rek-relaties, en geven betrekkingen tussen krachten- en vervormingsgrootheden;
- c. de *kinematische betrekkingen*; zij geven betrekkingen tussen vervormings- en verplaatsingsgrootheden.

Ter illustratie zijn de drie basisbetrekkingen in figuur 1.3 in schema gebracht voor een op buiging en extensie belaste ligger.



Figuur 1.3 (a) Verdeelde belastingen op een elementje uit een op buiging en extensie belaste ligger. (b) Schematische weergave van het verband tussen belasting en verplaatsing in het geval van buiging met extensie. Om dit verband te kunnen leggen moet men over alle drie typen basisbetrekkingen beschikken: de statische betrekkingen, constitutieve betrekkingen en kinematische betrekkingen.

¹ Eerder werden deze drie typen vergelijkingen in de vorm van *differentiaalbetrekkingen* afgeleid voor een op buiging en extensie belaste staaf. Zie TOEGEPASTE MECHANICA - deel 2, paragraaf 4.3.

ad a.

Tot de categorie van *statische betrekkingen* behoren onder meer:

- de formules voor het evenwicht van constructies of onderdelen daarvan;
- het beginsel van actie en reactie;
- de formules voor de snedekrachten gedefinieerd als de spanningsresultanten in een doorsnede;
- de relaties tussen statisch equivalente krachtersystemen.

De statische betrekkingen leggen dus een verband tussen krachtingrootheden onderling, waartoe worden gerekend verdeelde en geconcentreerde krachten, koppels en spanningen.

ad b.

De *constitutieve betrekkingen* geven het materiaalgedrag weer, meestal als een verband tussen spanningen en rekken. De beschouwing blijft hier beperkt tot een materiaal dat zich lineair elastisch gedraagt en de *wet van Hooke* volgt, die in zijn eenvoudigste vorm luidt:

$$\sigma = E\varepsilon$$

Meer generaliserend mag men voor een op extensie en buiging belaste staaf het verband tussen snedekrachten en vervormingsgrootheden ook een constitutieve betrekking noemen, zoals:

$$N = EA\varepsilon$$

$$M = EI\kappa$$

Algemeen kan men dan ook stellen dat de constitutieve betrekkingen op grond van het materiaalgedrag een verband leggen tussen krachtingrootheden en vervormingsgrootheden.

ad c.

De *kinematische betrekkingen* leggen een verband tussen verplaatsingen, rotaties, rekken, krommingen, enz. Hiertoe behoren onder meer:

- de formules voor rek en kromming, uitgedrukt in verplaatsingen en rotaties;
- de *vormveranderings- of aansluitvoorwaarden*, waarmee aan de vervormingen en verplaatsingen eisen worden gesteld met betrekking tot de samenhang in de constructie (*compatibiliteit*) en de bewegingsvrijheid in de opleggingen.

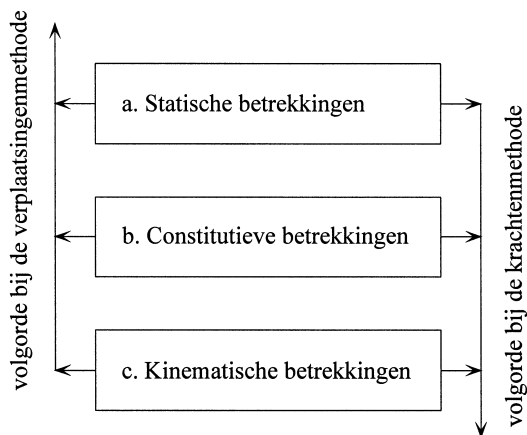
Kort samengevat: de kinematische betrekkingen leggen een verband tussen vervormingsgrootheden en verplaatsingsgrootheden.

De krachtsverdeling in een statisch bepaalde constructie is onafhankelijk van de constitutieve en kinematische betrekkingen en dus onafhankelijk van het materiaalgedrag. Voor de berekening van de krachtsverdeling in statisch bepaalde constructies zijn alleen de evenwichtsvergelijkingen nodig. De constitutieve en kinematische vergelijkingen worden alleen gebruikt om, als men daarin is geïnteresseerd, de vervormingen en verplaatsingen te berekenen.

Voor de berekening van de krachtsverdeling in statisch onbepaalde constructies zijn alle drie genoemde typen vergelijkingen nodig.

De verschillende berekeningsmethoden voor statisch onbepaalde constructies zijn globaal te rubriceren in drie groepen:

- *krachtenmethoden (flexibiliteitsmethoden)*
- *verplaatsingenmethoden (stijfheidsmethoden)*
- *gemengde methoden (hybride methoden)*



Figuur 1.4 De drie typen vergelijkingen, nodig voor de berekening van de krachtsverdeling in statisch onbepaalde constructies, en de volgorde waarin zij worden toegepast bij respectievelijk de verplaatsingen- en krachtenmethode.

Een karakteristiek verschil tussen de krachten- en verplaatsingenmethode komt tot uiting in de volgorde waarin de drie typen vergelijkingen a/t/m c aan de orde komen in de berekeningsprocedure, zie het schema in figuur 1.4.

Bij de krachtenmethode is de volgorde: $a \rightarrow b \rightarrow c$. Bij de verplaatsingenmethode is de volgorde omgekeerd: $c \rightarrow b \rightarrow a$.

De namen *krachtenmethode* en *verplaatsingenmethode* zijn ontleend aan de aard van de fundamentele onbekenden die in de eindvergelijkingen moeten worden opgelost: dat zijn krachtengrootheden in het geval van de krachtenmethode en verplaatsingsgrootheden in het geval van de verplaatsingenmethode.

Als de constructie zich lineair gedraagt¹ zijn de eindvergelijkingen lineair en kan gebruik worden gemaakt van het beginsel van superpositie. Bij de krachtenmethode kunnen de invloeden van belas-

ting en te berekenen krachtengrootheden op elkaar worden gesuperponeerd en bij de verplaatsingenmethode de invloeden van de verplaatsingen.

Hoewel de beginselen van beide methoden reeds lang bekend zijn is met de ontwikkeling van computerprogramma's de doorbraak van een formeel onderscheid tussen de krachten- en verplaatsingenmethode ontstaan.

De groep van *gemengde* of *hybride methoden* combineert elementen uit de krachten- en verplaatsingenmethode. Bij een gemengde methode heeft men in de eindvergelijkingen zowel krachtengrootheden als verplaatsingsgrootheden als onbekenden.

De gemengde methoden zijn ontstaan uit de behoefte om in een handberekening het aantal op te lossen vergelijkingen te beperken, al dan niet gecombineerd met een zekere systematiek voor bepaalde typen van constructies.

De strategie bij het berekenen van een statisch onbepaalde constructie wordt in sterke mate bepaald door de manier waarop de berekening wordt uitgevoerd: met de hand of met behulp van een computer.

Bij *handberekeningen* is het vooral van belang dat de hoeveelheid rekenwerk beperkt blijft. Bij *computergeoriënteerde berekeningsmethoden* bestaat de voorkeur voor een systematische en algemeen geldende aanpak.

Aan de hand van een aantal uitgewerkte voorbeelden wordt in hoofdstuk 2 de aanpak volgens de *krachtenmethode* toegelicht. Om de krachtenmethode handig toe te passen is inzicht nodig. De krachtenmethode heeft in het algemeen niet de systematiek die nodig is om er een computergeoriënteerde berekeningsmethode van te maken en is daarom een echte *handberekeningsmethode*.

¹ Dit is het geval als het materiaal lineair elastisch is (*fysisch lineair constructiegedrag*) en bovendien de invloed van de vervorming op de geometrie van de constructie zo gering is dat het evenwicht op de onvervormde constructie mag worden betrokken (*geometrisch lineair constructiegedrag*).

In hoofdstuk 3 wordt met de *hoekveranderingsvergelijkingen* een systematische aanpak gepresenteerd voor het berekenen van op buiging belaste statisch onbepaalde staafconstructies, zoals doorgaande liggers, portalen en raamwerken.

De methode met hoekveranderingsvergelijkingen is voor constructies met verplaatsbare knooppunten een *gemengde methode*. Voor constructies met niet-verplaatsbare knooppunten is het een *krachtenmethode*. Daarom is er voor gekozen de methode met hoekveranderingsvergelijkingen direct na de krachtenmethode te behandelen.

Vervolgens wordt in hoofdstuk 4 aan de hand van een aantal voorbeelden de aanpak volgens de verplaatsingenmethode toegelicht.

De verplaatsingenmethode blijkt een methode die zich goed leent voor een systematische aanpak en is daarom geschikt om te programmeren voor een

groot aantal constructietypen. Zo is de *eindige-elementenmethode* ontstaan als een computergeoriënteerde berekeningsmethode, gebaseerd op de systematiek van de verplaatsingenmethode. In hoofdstuk 5 wordt de gedachtegang bij de eindige-elementenmethode uiteengezet. Dit gebeurt aan de hand van een educatieve constructie opgebouwd uit elementen die bestaan uit op buiging belaste staven waarvan de uiteinden (knooppunten) wel kunnen roteren, maar niet kunnen verplaatsen.

Ten slotte wordt nog ingegaan op een aantal aspecten die in het bijzonder bij statisch onbepaalde constructies een rol spelen. Aan de orde komen *steunpuntszettingen* en *temperatuurinvloeden* in hoofdstuk 6, de invloed van *stijfheidsverschillen* in hoofdstuk 7 en van *verende verbindingen* in hoofdstuk 8.

Module 1 – Statisch onbepaalde constructies

Krachtenmethode

2

Na een beknopte uitleg van de aanpak volgens de krachtenmethode in paragraaf 2.1 volgen in paragraaf 2.2 enkele uitgewerkte rekenvoorbeelden. Het hoofdstuk wordt afgesloten met een aantal vraagstukken in paragraaf 2.3.

2.1 Opzet van de berekening

Het principe bij de krachtenmethode is dat de statisch onbepaalde constructie wordt veranderd in een statisch bepaalde constructie onder toevoeging van een aantal krachten waarmee men de krachtsverdeling in de oorspronkelijke constructie kan simuleren.

De statisch bepaald gemaakte constructie noemt men wel het *statisch bepaalde hoofdsysteem*. De krachten die worden toegevoegd om de krachtsverdeling in de oorspronkelijke constructie te kunnen simuleren noemt men de *statisch onbepaalden*. De grootte van deze krachten is vooralsnog onbekend.

De juiste krachtsverdeling is die waarbij de vervorming van het statisch bepaalde hoofdsysteem gelijk is aan vervorming van de (oorspronkelijke) statisch onbepaalde constructie. Dit leidt tot een aantal eisen ten aanzien van de verplaatsingen en/of rotaties, die men *vormveranderingsvoorwaarden of aansluitvoorwaarden* noemt. Er blijken al-

tijd evenveel vormveranderingsvoorwaarden als statisch onbepaalden te zijn.

Uit de vormveranderingsvoorwaarden kan men de grootte en richting van de statisch onbepaalden berekenen.

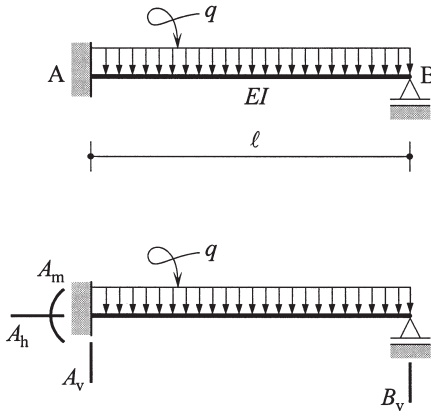
Door superpositie van de krachtsverdelingen in het statisch bepaalde hoofdsysteem tengevolge van respectievelijk de belasting en de statisch onbepaalden vindt men tenslotte de gezochte de krachtsverdeling in de statisch onbepaalde constructie.

Opmerkingen:

- Bij de krachtenmethode wordt eerst het evenwicht op het statisch bepaalde hoofdsysteem toegepast, vervolgens worden met de constitutieve vergelijkingen de vervormingen berekend, en tenslotte worden de aansluitvoorwaarden voor de verplaatsingen opgesteld. De volgorde waarin de verschillende typen vergelijkingen aan de orde komen is overeenkomstig het schema in figuur 1.4.
- Bij het uitwerken van de vormveranderings- of aansluitvoorwaarden moeten verplaatsingen en rotaties worden berekend, waarvoor men vaak gebruik kan maken van *vergeet-mij-nietjes*¹ of *momentenvlakstellingen*². Met de toepassing hiervan dient men vertrouwd te zijn.

¹ Zie TOEGEPASTE MECHANICA - deel 2, paragraaf 8.3.

² Zie TOEGEPASTE MECHANICA - deel 2, paragraaf 8.4.



Figuur 2.1 (a) Een statisch onbepaalde ligger. (b) De ligger heeft vier oplegreacties. Er zijn maar drie evenwichtsvergelijkingen beschikbaar. De ligger is dus enkelvoudig statisch onbepaald.

- Het aantal vormveranderings- of aansluitvoorwaarden is gelijk aan het aantal statisch onbepaalden.
- Bij de krachtenmethode is het van belang vooraf de *graad van statisch onbepaaldheid* te kennen. In een deel van de voorbeelden is de berekening van de graad van statische onbepaaldheid opgenomen in de uitwerking. In andere voorbeelden wordt de berekening aan de lezer overgelaten¹.
- Er bestaat een grote vrijheid in de manier waarop men een statisch onbepaalde constructie statisch bepaald kan maken. Dit betekent dat een berekening met de krachtenmethode op meerdere manieren kan worden gerealiseerd. In het geval van een handberekening is het gewenst de manier te kiezen die rekentechnisch de minste inspanning vergt. Hiervoor is inzicht nodig, mede te verkrijgen door voldoende oefening.

2.2 Voorbeelden van de krachtenmethode

- (a) De krachtenmethode wordt hierna geïllustreerd aan de hand van tien voorbeelden. De eerste zeven hebben betrekking op *buiging* en de laatste drie op *extensie*. Aan de orde komen onder meer de keuze van een handig statisch bepaald hoofdsysteem en het formuleren en uitwerken van de bijbehorende vormveranderings- of aansluitvoorwaarden.
- (b) De voorbeelden 1, 2 en 7 kan men zien als een introductie tot de *hoekveranderingsvergelijkingen*, waarop in hoofdstuk 3 uitvoerig wordt teruggekomen.

Uit de voorbeelden 3, 4 en 8 blijkt dat de krachtsverdeling in een statisch onbepaalde constructie afhankelijk is van de *stijfheidsverhoudingen*. Op de invloed van de stijfheidsverhoudingen wordt teruggekomen in hoofdstuk 7.

2.2.1 Voorbeeld 1 – Statisch onbepaalde ligger

Ligger AB in figuur 2.1 heeft een lengte ℓ en buigstijfheid EI . De ligger is ingeklemd in A en opgelegd op een rol in B en draagt een gelijkmatig verdeelde volbelasting q .

Gevraagd:

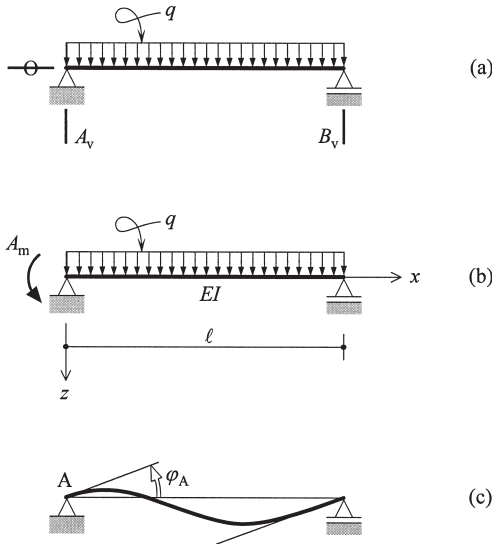
- De oplegreacties in A en B.
- De momenten- en dwarskrachtenlijn.

*Uitwerking*²:

De ligger heeft vier oplegreacties, zie figuur 2.1b, terwijl er maar drie evenwichtsvergelijkingen beschikbaar zijn. De ligger is dus enkelvoudig statisch onbepaald. Uit het horizontaal krachten-evenwicht vindt men weliswaar $A_h = 0$, maar met de resterende twee evenwichtsvergelijkingen is het onmogelijk de andere drie oplegreacties te berekenen.

¹ Zie voor het berekenen van de graad van statisch onbepaaldheid: TOEGEPASTE MECHANICA - deel 1, paragraaf 4.5.

² De krachtsverdeling in deze ligger (maar dan gespiegeld) werd eerder met behulp van de differentiaalvergelijking voor buiging berekend, zie TOEGEPASTE MECHANICA - deel 2, paragraaf 8.4, voorbeeld 3. De oplossing met de differentiaalvergelijking volgt de strategie van de verplaatsingsmethode. In paragraaf 4.2 wordt hierop nog teruggekomen.



Figuur 2.2 (a) Keuze van de vrij opgelegde ligger als statisch bepaald hoofdsysteem. (b) Het onbekende moment A_m vervangt het weggenomen inklemmingsmoment en noemt men de statisch onbepaalde. (c) A_m kan men berekenen uit de vormveranderings- of aansluitvoorwaarde dat de rotatie φ_A in A ten gevolge van q en A_m samen nul is.

Om de krachtsverdeling te berekenen wordt eerst een *statisch bepaald hoofdsysteem* gekozen. Daartoe moet men de ligger zo veranderen dat deze statisch bepaald wordt. Dit kan op meerdere manieren gebeuren. In figuur 2.2a is dat gerealiseerd

door de inklemming in A te vervangen door een scharnieroplegging. Het onbekende inklemmingsmoment A_m is nu verdwenen.

Om met de statisch bepaalde ligger in figuur 2.2a toch de krachtsverdeling in de oorspronkelijke statisch onbepaalde ligger in figuur 2.1 te kunnen simuleren wordt het weggenomen inklemmingsmoment A_m als een belasting ingevoerd, zie figuur 2.2b. De richting van A_m kan men vrij kiezen. Het onbekende moment A_m ter vervanging van het inklemmingsmoment noemt men de *statisch onbepaalde*.

De statisch bepaalde ligger kan in A vrij roteren onder invloed van de belasting q en het onbekende moment A_m , zie figuur 2.2c. De oorspronkelijke ligger in figuur 2.1a is in A ingeklemd en kan daarom in A niet roteren. Het onbekende inklemmingsmoment A_m moet blijkbaar zo groot zijn dat de totale rotatie in A tengevolge van q en A_m samen nul is. Dit leidt tot de voorwaarde $\varphi_A = 0$. Met deze *vormveranderingsvoorwaarde* of *aansluitvoorwaarde* kan men de statisch onbepaalde A_m berekenen.

Bij de in figuur 2.2b aangenomen richting van A_m , en werkend in het aangegeven x - z -assenstelsel, vindt men met behulp van vergeet-mij-nietjes¹:

$$\varphi_A = -\frac{q\ell^3}{24EI} + \frac{A_m\ell}{3EI} = 0 \Rightarrow A_m = \frac{1}{8}q\ell^2$$

¹ Zie TOEGEPASTE MECHANICA - deel 2, tabel 8.4.

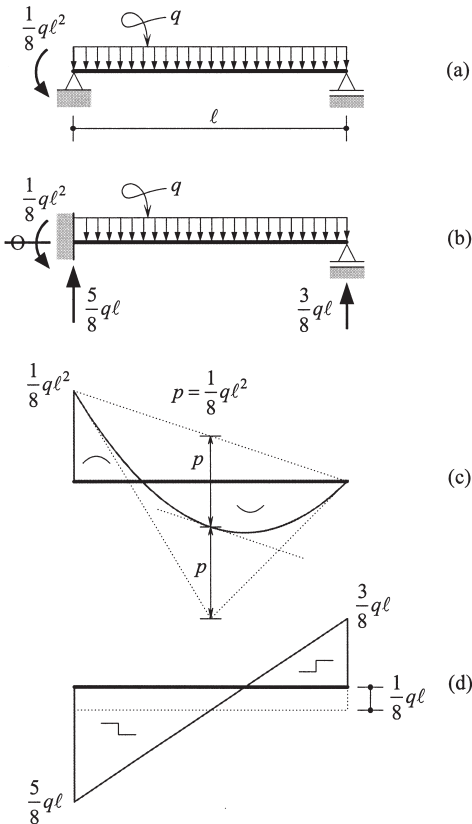
De berekening van de krachtsverdeling in de statisch onbepaalde ligger is hiermee teruggebracht tot het berekenen van de vrij opgelegde ligger in figuur 2.3a, belast door een gelijkmatig verdeelde belasting q en een koppel $A_m = \frac{1}{8}q\ell^2$ in liggereinde A. De oplegreacties van de statisch onbepaalde ligger en de momenten- en dwarskrachtenlijn kan men vinden door de invloeden van q en A_m op elkaar superponeren. Het resultaat is gegeven in figuur 2.3b t/m 2.3d.

Opmerkingen:

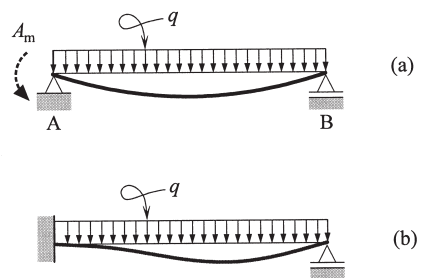
- Men is vrij in de keuze van de richting van de statisch onbepaalde. Vindt men in het eindre-

sultaat een positieve waarde dan werd de richting goed gekozen, vindt men een negatieve waarde dan werkt de statisch onbepaalde tegengesteld aan de aangenomen richting. In dit voorbeeld werd voor A_m dus de juiste richting gekozen.

- Soms kan men de richting van de statisch onbepaalde vooraf vaststellen door de vervorming van het statisch bepaalde hoofdsysteem te vergelijken met die van de oorspronkelijke constructie. In het statisch bepaalde hoofdsysteem in figuur 2.4a zal het liggereinde in A rechtsom draaien ten gevolge van de verdeelde belasting q . Omdat einde A in werkelijkheid door de inklemming wordt belet te verdraaien, zie figuur 2.4b, zal het inklemmingsmoment A_m deze rotatie willen tegengaan en dus linksom moeten werken.
- Om vergissingen te voorkomen is het verstandig vooraf duidelijk aan te geven in welke richting de rotaties φ positief zijn, bijvoorbeeld door te werken in een assenstelsel.
- Merk op dat de oplegreacties en snedekrachten onafhankelijk zijn van de buigstijfheid EI . Verandert men de buigstijfheid dan heeft dat geen invloed op de krachtsverdeling, maar – let op! – wel op de verplaatsingen.



Figuur 2.3 (a) De berekening van de krachtsverdeling in een statisch onbepaalde ligger is nu teruggebracht tot die van een statisch bepaalde ligger. (b) Oplegreacties, (c) momentenlijn en (d) dwarskrachtenlijn.



Figuur 2.4 Soms is de richting van de statisch onbepaalde vooraf te voorspellen door naar de vervorming van het statisch bepaalde hoofdsysteem te kijken. (a) Het liggereinde in A zal onder invloed van de verdeelde belasting q rechtsom draaien. (b) In werkelijkheid belet de inklemming deze rotatie. Het inklemmingsmoment A_m zal dus linksom moeten werken.

Variantuitwerking:

Er zijn vele mogelijkheden om de ligger statisch bepaald te maken. Zo kan men de ligger ook statisch bepaald maken door de roloplegging in B en daarmee de verticale oplegreactie B_v wegnemen, zie het statisch bepaalde hoofdsysteem in figuur 2.5b. Uiteinde B kan nu verticaal verplaatsen.

Om de krachtsverdeling in de statisch onbepaalde constructie te simuleren zet men de statisch onbepaalde B_v als een belasting op het statisch bepaalde hoofdsysteem, zie figuur 2.5c. Uit de vervorming van het statisch bepaalde hoofdsysteem in figuur 2.5b mag men verwachten dat B_v omhoog werkt. Daarom is voor deze richting gekozen.

De vormveranderings- of aansluitvoorwaarde bestaat nu uit de eis dat de verticale verplaatsing in B tengevolge van q en B_v samen nul moet zijn:

$$w_B = 0.$$

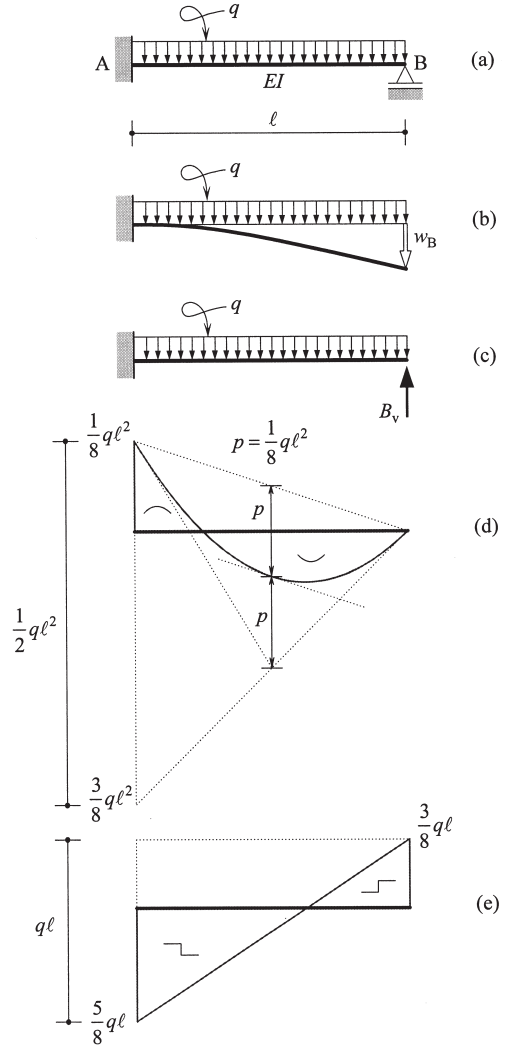
Met vergeet-mij-nietjes vindt men:

$$w_B = +\frac{q\ell^4}{8EI} - \frac{B_v\ell^3}{3EI} = 0 \Rightarrow B_v = \frac{3}{8}q\ell$$

De berekening van krachtsverdeling in de statisch onbepaalde ligger is nu teruggebracht tot het berekenen van de uitkragende ligger in figuur 2.5c, met een gelijkmatig verdeelde volbelasting q en een puntlast $B_v = \frac{3}{8}q\ell$ in het vrije einde B. Zoals aangegeven in de figuren 2.5d en 2.5e leidt dit tot dezelfde momenten- en dwarskrachtenlijn als eerder werd gevonden in figuur 2.3.

Opmerking:

Bij de krachtenmethode is er veel vrijheid in de keuze van het statisch bepaalde hoofdsysteem en de statisch onbepaalden. Het vergt enig inzicht om een zodanige keuze te maken dat de hoeveelheid rekenwerk beperkt blijft, wat duidelijk gewenst is in het geval van een handberekening.



Figuur 2.5 (a) Statisch onbepaalde ligger met (b) als statisch bepaald hoofdsysteem de in A ingeklemde ligger. (c) De statisch onbepaalde is hier de verticale oplegreactie B_v in B. Deze is te berekenen uit de aansluitvoorwaarde dat in B de zakking w_B nul is. Door superpositie van de krachtsverdeling ten gevolge van q en B_v vindt men vervolgens (d) de momenten-lijn en (e) de dwarskrachtenlijn.

Een voorbeeld van een wat minder handig gekozen statisch bepaald hoofdsysteem toont figuur 2.6b, met een scharnier in C. De statisch onbepaalde is hier het *momentenpaar*¹ M_C , ter vervanging van het weggenomen buigend moment in C.

In het statisch bepaalde hoofdsysteem kunnen de liggereinden van AC en BC in scharnier C vrij ten

opzichte van elkaar verdraaien, waardoor de elastische lijn in C een knik (of *gaping*) $\Delta\varphi_C$ kan vertonen, zie figuur 2.6c. In werkelijkheid zit er in C geen scharnier en moeten de rotaties links en rechts van C aan elkaar gelijk zijn, zie figuur 2.6d. Dit leidt tot de aansluitvoorwaarde $\varphi_C^{AC} = \varphi_C^{BC}$. In deze vorm noemt men de aansluitvoorwaarde een *hoekveranderingsvergelijking*².

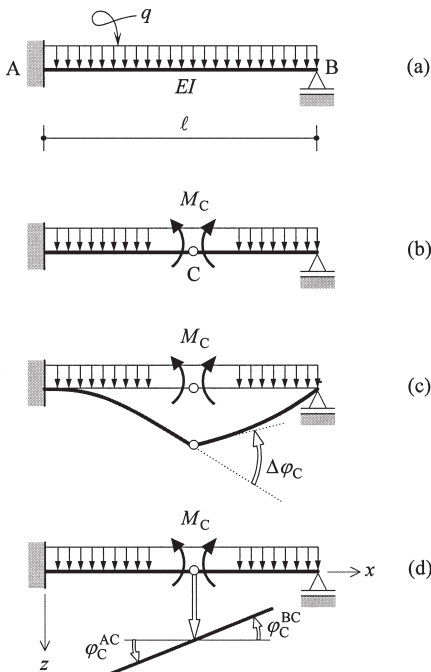
Omdat C ook nog verticaal kan verplaatsen is het berekenen van de rotaties φ_C^{AC} en φ_C^{BC} in dit geval nogal bewerkelijk en heeft deze keuze van het statisch bepaalde hoofdsysteem niet de voorkeur.

2.2.2 Voorbeeld 2 – Over vier steunpunten doorgaande ligger

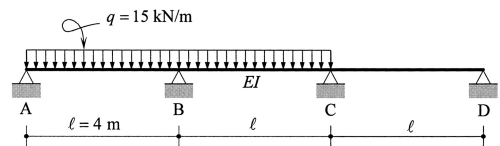
Figuur 2.7 toont de over vier steunpunten doorgaande prismatische ligger ABCD met buigstijfheid EI . De drie velden hebben dezelfde lengte $\ell = 4$ m. Op ABC werkt een gelijkmatig verdeelde belasting $q = 15$ kN/m.

Gevraagd:

De momenten- en dwarskrachtenlijn en de verticale oplegreacties.



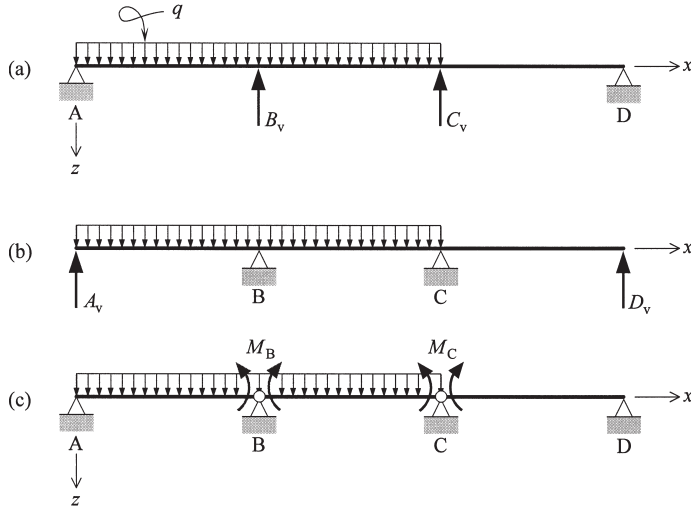
Figuur 2.6 (a) Statisch onbepaalde ligger met (b) een onhandig gekozen statisch bepaald hoofdsysteem. De statisch onbepaalde is hier het buigend moment M_C in C. Deze is te berekenen uit de voorwaarde dat (c) de gaping $\Delta\varphi_C$ in C nul moet zijn. (d) Dat leidt tot de hoekveranderingsvergelijking $\varphi_C^{AC} = \varphi_C^{BC}$. Omdat C ook nog verticaal kan verplaatsen is het berekenen van deze rotaties bewerkelijk.



Figuur 2.7 Over vier steunpunten doorgaande prismatische ligger met buigstijfheid EI . De ligger is 5-voudig statisch onbepaald. Betrokken op het geval van buiging is de ligger 2-voudig statisch onbepaald. In het statisch bepaalde hoofdsysteem krijgt men dus te maken met twee statisch onbepaalden.

¹ Het buigend moment is een snedekracht (interactiekracht, verbindingskracht). Snedekrachten treden altijd in paren op. Vandaar dat het buigend moment als statisch onbepaalde een momentenpaar is. Zie ook TOEGEPASTE MECHANICA - deel 1, paragraaf 10.1.1.

² Soms ziet men de aansluitvoorwaarde gepresenteerd in de vorm dat de gaping $\Delta\varphi_C$ in scharnier C nul moet zijn. Onder gaping verstaat men het verschil in rotatie van de doorsneden (liggereinden) aan weerszijden van het scharnier. In de formulering $\Delta\varphi_C = 0$ noemt men de aansluitvoorwaarde een *gapingvergelijking*.



Figuur 2.8 Drie mogelijke keuzen voor een statisch bepaald hoofdsysteem. Statisch bepaald hoofdsysteem (c) heeft het voordeel dat deze bestaat uit drie liggers die onafhankelijk van elkaar kunnen vervormen.

Uitwerking:

Alle opleggingen zijn scharnieropleggingen met per oplegging twee oplegreacties. In totaal leidt dat tot $r = 4 \times 2 = 8$ onbekende oplegreacties. Voor de ligger in zijn geheel staan $e = 3$ evenwichtsvergelijkingen ter beschikking. Voor de graad van statisch onbepaaldheid¹ geldt dus: $n = r - e = 8 - 3 = 5$.

Bij een rechte ligger kan men de gevallen van buiging en extensie gescheiden behandelen. Bekijkt men alleen het geval van extensie, dan beschikt men over één evenwichtsvergelijking (het horizontaal krachtenevenwicht) en vier onbekende horizontale oplegreacties. Betrokken op het geval van extensie geldt dus $n_{\text{extensie}} = 4 - 1 = 3$ en is de ligger drievoudig statisch onbepaald. Beperkt men zich tot het geval van buiging, dan zijn er twee evenwichtsvergelijkingen (het verticaal krachtenevenwicht en het momentenevenwicht) en vier onbekende verticale oplegreacties.

Betrokken op het geval van buiging geldt $n_{\text{buiging}} = 4 - 2 = 2$ en is de ligger tweevoudig statisch onbepaald.

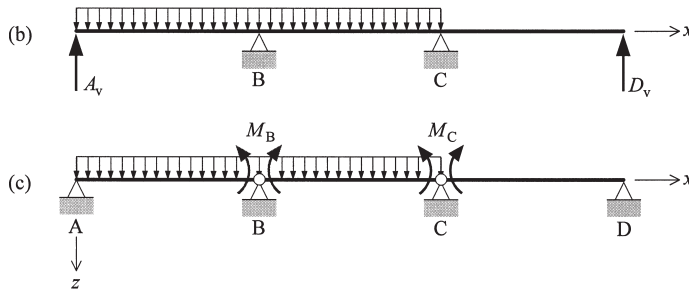
Voor het berekenen van de krachtsverdeling in het geval van buiging moet men dus zoeken naar een statisch bepaald hoofdsysteem met twee statisch onbepaalden. In figuur 2.8 zijn een drietal mogelijkheden aangegeven.

In figuur 2.8a zijn de opleggingen in B en C weggenomen. De verticale oplegreacties B_v en C_v zijn de statisch onbepaalden. In de werkelijke constructie is de verticale verplaatsing in zowel B als C nul. Dit leidt tot de volgende twee aansluitvoorwaarden (evenveel als er statisch onbepaalden zijn):

$$w_B = 0 \text{ en } w_C = 0$$

Het berekenen van de verplaatsingen w_B en w_C tengevolge van q , B_v en C_v is echter behoorlijk bewerkelijk.

¹ Zie TOEGEPASTE MECHANICA - deel 1, paragraaf 4.5.3.



Figuur 2.8 (vervolg) Statisch bepaald hoofdsysteem (c) heeft het voordeel dat deze bestaat uit drie liggers die onafhankelijk van elkaar kunnen vervormen. De steunpuntsmomenten M_B en M_C zijn de twee statisch onbepaalden. Hun richtingen mag men vrij kiezen mits men bedenkt dat M_B en M_C interactiekrachten zijn en dus optreden als momentenparen die voldoen aan het beginsel van actie en reactie.

Een ander statisch bepaald hoofdsysteem is dat in figuur 2.8b, met de verticale oplegreacties A_v en D_v als statisch onbepaalden. De aansluitvoorwaarden volgen uit de eis dat de verticale verplaatsingen in A en D nul moeten zijn:

$$w_A = 0 \text{ en } w_D = 0$$

Dit statisch bepaalde hoofdsysteem werkt heel wat handiger omdat men voor het berekenen van de verplaatsingen in A en D gebruik kan maken van bekende vergeet-mij-nietjes, zij het dat de berekening nog steeds bewerkelijk is in verband met de optredende kwispeleffecten over AB en CD¹.

In figuur 2.8c is het statisch bepaalde hoofdsysteem verkregen door ter plaatse van de opleggingen B en C scharnieren in de doorgaande ligger aan te brengen. De *steunpuntsmomenten* M_B en M_C (momentenparen) in respectievelijk B en C zijn nu de statisch onbepaalden. In feite bestaat het statisch bepaalde hoofdsysteem uit de drie afzonderlijke liggers AB, BC en CD, die onafhankelijk van elkaar kunnen vervormen, zie figuur 2.9a, en waarvan men de rotaties in B en C eenvoudig kan berekenen met vergeet-mij-nietjes². Daarom blijkt

deze keuze van het statisch bepaalde hoofdsysteem verreweg het snelste te werken.

Opmerkingen:

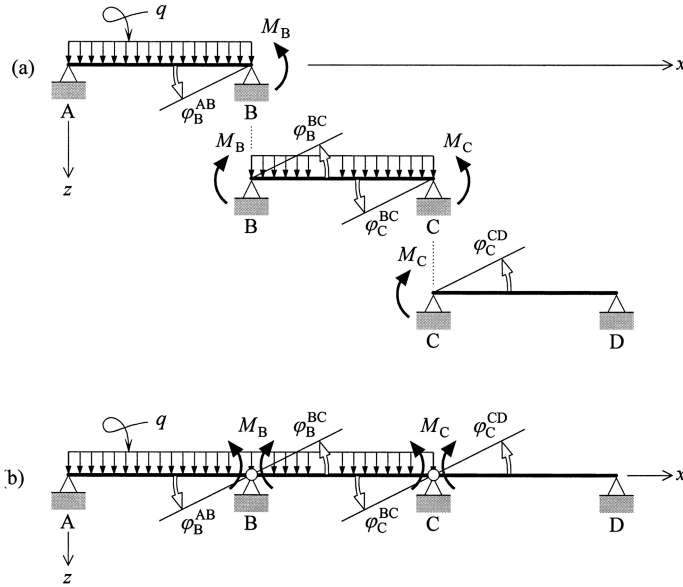
- De richting van de statisch onbepaalden M_B en M_C mag men vrij kiezen. Wel dient men te bedenken dat M_B en M_C buigende momenten (interactiekrachten) zijn en dus optreden als momentenparen die voldoen aan het beginsel van actie en reactie.
- Het is gebruikelijk de berekening uit te voeren aan de hand van de voorstelling in figuur 2.9b, zonder de liggerdelen volkomen los van elkaar te tekenen.
- In figuur 2.9 zijn de nog onbekende rotaties φ in B en C overeenkomstig hun positieve richtingen getekend³.

De aansluitvoorwaarden volgen uit de eis dat de ligger ter plaatse van de in B en C aangebrachte scharnieren geen knikken (gapingen) mag vertonen. De rotaties links en rechts van B moeten dus aan elkaar gelijk zijn. Hetzelfde geldt in D. De twee aansluitvoorwaarden of *hoekveranderingsvergelijkingen* zijn, zie figuur 2.9:

¹ Zie TOEGEPASTE MECHANICA - deel 2, paragraaf 8.3, voorbeeld 9.

² Zie de vergeet-mij-nietjes (4) en (6) in TOEGEPASTE MECHANICA - deel 2, tabel 8.4.

³ Als de berekening wordt uitgevoerd aan de hand van een figuur dient men in deze figuur alle in symbolen gepresenteerde grootheden die zijn gebonden aan een tekenafspraken overeenkomstig hun positieve richting te tekenen. De richting van de rotatie φ is gerelateerd aan het x-z-assenstelsel.



Figuur 2.9 (a) De rotaties in de staafenden en (b) visualisering van de hoekveranderingsvergelijkingen in B en C.

$$\varphi_B^{AB} = \varphi_B^{BC}$$

$$\varphi_C^{BC} = \varphi_C^{CD}$$

Bij de in figuur 2.9 aangenomen richtingen van M_B en M_C vindt men met behulp van vergeet-mij-nietjes:

$$\varphi_B^{AB} = +\frac{q\ell^3}{24EI} + \frac{M_B\ell}{3EI}$$

$$\varphi_B^{BC} = -\frac{q\ell^3}{24EI} - \frac{M_B\ell}{3EI} - \frac{M_C\ell}{6EI}$$

$$\varphi_C^{BC} = +\frac{q\ell^3}{24EI} + \frac{M_C\ell}{3EI} + \frac{M_B\ell}{6EI}$$

$$\varphi_C^{CD} = -\frac{M_C\ell}{3EI}$$

Gesubstitueerd in de hoekveranderingsvergelijkingen leidt dit tot:

$$+\frac{q\ell^3}{24EI} + \frac{M_B\ell}{3EI} = -\frac{q\ell^3}{24EI} - \frac{M_B\ell}{3EI} - \frac{M_C\ell}{6EI}$$

$$+\frac{q\ell^3}{24EI} + \frac{M_C\ell}{3EI} + \frac{M_B\ell}{6EI} = -\frac{M_C\ell}{3EI}$$

Na vermenigvuldiging van alle termen met $24EI/\ell$ en het ordenen van de termen vindt men:

$$+16M_B + 4M_C = -2q\ell^2$$

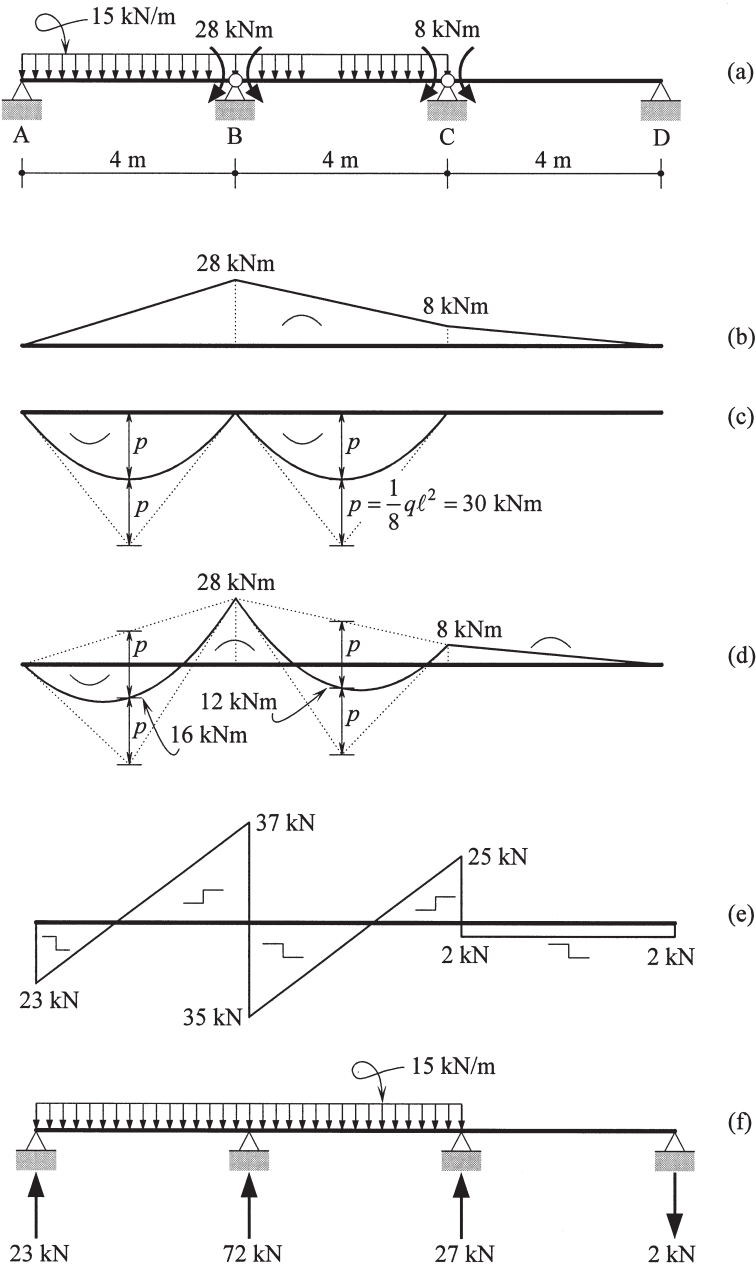
$$+4M_B + 16M_C = -q\ell^2$$

Dit zijn twee vergelijkingen met de twee statisch onbepaalde M_B en M_C als onbekenden. De oplossing is:

$$M_B = -\frac{7}{60}q\ell^2 = -\frac{7}{60}(15 \text{ kN/m})(4 \text{ m})^2 = -28 \text{ kNm}$$

$$M_C = -\frac{2}{60}q\ell^2 = -\frac{2}{60}(15 \text{ kN/m})(4 \text{ m})^2 = -8 \text{ kNm}$$

Dat M_B en M_C negatief zijn duidt er op dat beide steunpuntsmomenten tegengesteld werken aan de in figuur 2.9 aangenomen richtingen.



Figuur 2.10 (a) De berekening van de krachtsverdeling in de tweevoudig statisch onbepaalde ligger is teruggebracht tot die van drie statisch bepaalde liggers. (b) Momentenlijn ten gevolge van de statisch onbepaalden. (c) Momentenlijn ten gevolge van de verdeelde belasting. (d) De momentenlijn van de statisch onbepaalde constructie wordt gevonden door superpositie van de momentenlijnen (b) en (c). (e) Dwarskrachtenlijn en (f) oplegreacties.

In figuur 2.10a zijn hun juiste richtingen getekend; beide steunpuntsmomenten geven trek aan de bovenkant van de ligger.

In figuur 2.10b is de M -lijn getekend voor het statisch bepaalde hoofdsysteem tengevolge van de statisch onbepaalde M_B en M_C en in figuur 2.10c ten gevolge van alleen de veldbelasting q op ABC. Superpositie¹ leidt tot de gevraagde momentenlijn voor de statisch onbepaalde ligger, zie figuur 2.10d.

Het dwarskrachtenverloop kan men direct uit de helling van de momentenlijn afleiden². Het resultaat is weergegeven in figuur 2.10e.

De oplegreacties vindt men vervolgens uit de sprongen in de dwarskrachtenlijn, zie figuur 2.10f.

Controle:

Als de berekening goed is uitgevoerd moet de ligger in zijn geheel voldoen aan het verticaal krachtenevenwicht en het momentenevenwicht, zie figuur 2.10f:

$$\Sigma F_{\text{vert}}(\downarrow) = (8 \text{ m})(15 \text{ kN/m}) - (23 \text{ kN}) - (72 \text{ kN}) - (27 \text{ kN}) + (2 \text{ kN}) = 0$$

$$\Sigma T|A(\curvearrowright) = - (8 \text{ m})(15 \text{ kN/m})(4 \text{ m}) + (72 \text{ kN})(4 \text{ m}) + (27 \text{ kN})(8 \text{ m}) - (2 \text{ kN})(12 \text{ m}) = 0$$

Er blijkt inderdaad evenwicht te zijn.

Opmerking:

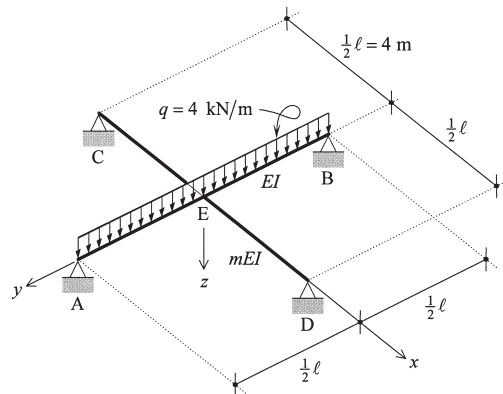
Let op: deze controle heeft alleen betrekking op de relatie tussen de buigende buigend momenten, dwarskrachten en oplegreacties. Het is geen controle op de grootte en richting van de berekende statisch onbepaalde M_B en M_C .

2.2.3 Voorbeeld 3 – Twee kruiselings over elkaar gelegde balken

In figuur 2.11 rust kinderbalk AB in E op moerbalk CD. Beide balken hebben dezelfde lengte $\ell = 8 \text{ m}$. E ligt in het midden van zowel AB als CD. Balk AB heeft een buigstijfheid EI en balk CD een buigstijfheid mEI . Balk AB draagt een verticale gelijkmatig verdeelde volbelasting $q = 4 \text{ kN/m}$. Er wordt alleen gekeken naar de krachtsverdeling tengevolge van de verticale krachten op de constructie. Krachten in het horizontale vlak blijven dus buiten beschouwing.

Gevraagd:

- De kracht die de balken AB en CD in E op elkaar uitoefenen.
- De invloed van de stijfheidsverhouding m op de krachtsverdeling.



Figuur 2.11 Twee kruiselings over elkaar gelegde balken. Kinderbalk AB rust in E op moerbalk CD. Met betrekking tot buiging is de constructie enkelvoudig statisch onbepaald.

¹ Zie bijvoorbeeld ook TOEGEPASTE MECHANICA - deel 1, paragraaf 12.4, voorbeeld 2.

² Zie bijvoorbeeld TOEGEPASTE MECHANICA - deel 1, paragraaf 12.1.5, voorbeeld 2.

De volgende vragen te beantwoorden voor $m = 1$, het geval dat kinderbalk AB en moerbalk CD dezelfde buigstijfheid hebben:

- c. De M - en V -lijn voor AB en CD.
- d. De verticale oplegreacties in A t/m D.

Uitwerking:

a. Beperkt men zich tot het geval van buiging tengevolge van krachten loodrecht op het x - y -vlak, dan heeft men voor de constructie in zijn geheel te doen met slechts drie evenwichtsvergelijkingen, te weten het krachtenevenwicht in de z -richting en het momentenevenwicht om respectievelijk de x - en y -as, dus $e = 3$.

Verder zijn er vier onbekende verticale oplegreacties in A t/m D, dus $r = 4$.

Dit leidt tot $n_{\text{buiging}} = r - e = 4 - 3 = 1$.

De constructie is dus enkelvoudig statisch onbepaald als men alleen maar kijkt naar geval van buiging tengevolge van krachten loodrecht op het x - y -vlak.

In figuur 2.12 zijn de balken van elkaar vrijgemaakt. De twee vrij opgelegde balken vormen samen het statisch bepaalde hoofdsysteem. De verticale interactiekracht E_v (een krachtenpaar!) tussen AB en CD, hier aangenomen als een drukkracht, wordt gekozen als statisch onbepaalde.

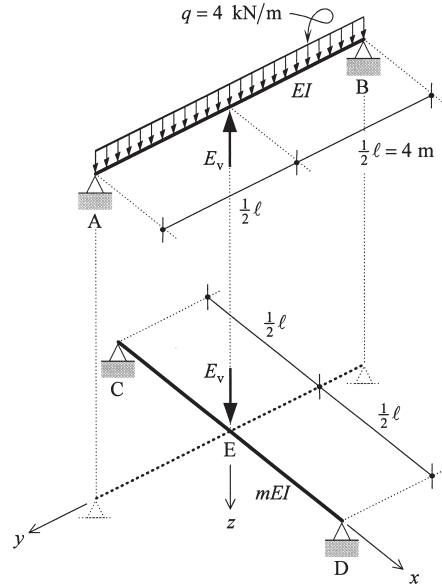
De aansluitvoorwaarde in figuur 2.12 volgt uit de eis dat AB en CD in E dezelfde verticale verplaatsing moeten ondergaan:

$$w_E^{AB} = w_E^{CD}$$

Met vergeet-mij-nietjes vindt men:

$$w_E^{AB} = + \frac{5}{384} \frac{q \ell^4}{EI} - \frac{1}{48} \frac{E_v \ell^3}{EI}$$

$$w_E^{CD} = + \frac{1}{48} \frac{E_v \ell^3}{mEI}$$



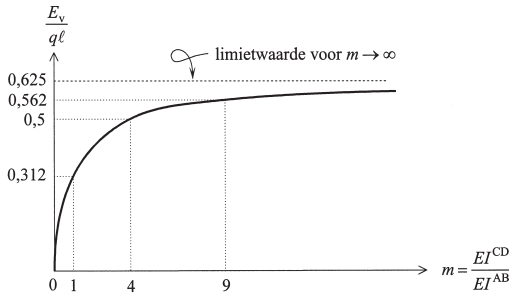
Figuur 2.12 Het statisch bepaalde hoofdsysteem bestaat uit de twee vrijgemaakte balken. De verticale interactiekracht (een krachtenpaar) is de statisch onbepaalde. Deze is te berekenen uit de aansluitvoorwaarde dat AB en CD in E dezelfde verticale verplaatsing moeten ondergaan.

Hiermee wordt de aansluitvoorwaarde:

$$+ \frac{5}{384} \frac{q \ell^4}{EI} - \frac{1}{48} \frac{E_v \ell^3}{EI} = + \frac{1}{48} \frac{E_v \ell^3}{mEI}$$

waaruit men vindt:

$$E_v = \frac{m}{m+1} \cdot \frac{5}{8} q \ell$$



Figuur 2.13 De grootte van de interactiekracht in E als functie van de stijfheidsverhouding tussen moerbalk CD en kinderbalk AB. Hoe stijver de moerbalk, hoe meer deze via E te dragen krijgt.

b. In figuur 2.13 is $E_v/q\ell$ uitgezet als functie van de stijfheidsverhouding $m = EI^{CD}/EI^{AB}$. Wordt moerbalk CD bijvoorbeeld viermaal zo stijf gekozen als kinderbalk AB ($m = 4$), dan vindt men uit figuur 2.13 $E_v = 0,562ql$. Dit betekent dat elk van de balken de helft van de totale belasting draagt¹.

Hoe stijver balk CD wordt gekozen ten opzichte van balk AB en hoe groter m wordt, des te meer balk CD krijgt te dragen. Men zegt wel dat de stijvere delen in een statisch onbepaalde constructie krachten en momenten naar zich toetrekken. Met de stijfheidsverhouding m kan men dus in zekere mate de krachtsverdeling beïnvloeden. Er kunnen twee extreme situaties worden onderscheiden:

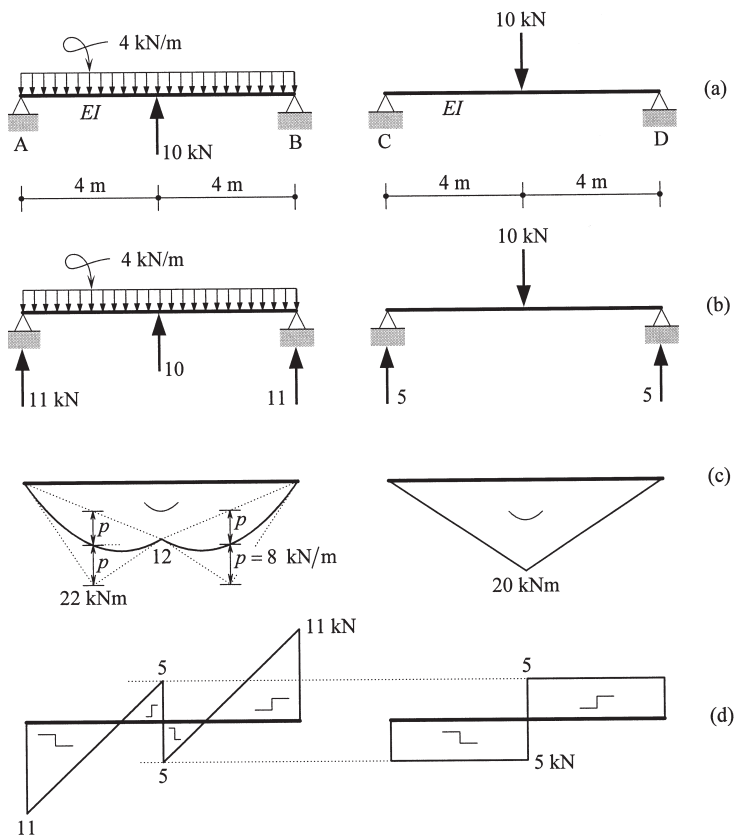
- Als $m \rightarrow 0$ vindt men $E_v = 0$.
De buigstijfheid van moerbalk CD is verwaarloosbaar klein ten opzichte van kinderbalk AB en doet niet meer mee in het dragen van de belasting. De verplaatsing in E is gelijk aan die van de vrij opgelegde ligger AB.
- Als $m \rightarrow \infty$ vindt men $E_v = 0,625ql$.
Deze situatie doet zich voor als moerbalk CD zeer veel stijver is dan kinderbalk AB. Het is alsof AB in E op een starre oplegging rust. De verplaatsing en rotatie in E zijn beide nul².

c. Als beide balken dezelfde buigstijfheid EI hebben ($m = 1$) vindt men in het geval dat $q = 4 \text{ kN/m}$ en $\ell = 8 \text{ m}$:

$$E_v = \frac{m}{m+1} \cdot \frac{5}{8} ql = \frac{1}{1+1} \cdot \frac{5}{8} \cdot (4 \text{ kN/m})(8 \text{ m}) = 10 \text{ kN (een drukkracht)}$$

¹ Alle oplegreacties in A t/m D zijn dan aan elkaar gelijk. De lezer wordt verzocht dit te controleren.

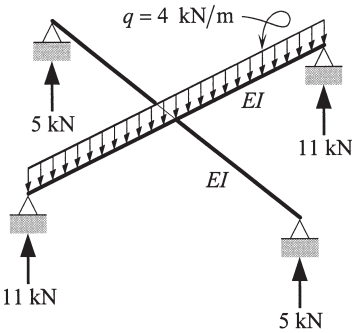
² De waarde van E_v kan men in dit geval ook berekenen via vergeet-mij-nietje (9), zie TOEGEPASTE MECHANICA - deel 2, tabel 8.4.



Figuur 2.14 De krachtsverdeling in het geval kinderbalk AB en moerbalk CD dezelfde buigstijfheid EI hebben: (a) de vrijgemaakte balken, (b) oplegreacties, (c) momentenlijnen en (d) dwarskrachtenlijnen.

In figuur 2.14a zijn de balken AB en CD afzonderlijk getekend, elk met zijn eigen belasting. In figuur 2.14b zijn voor beide balken de oplegreacties getekend en in figuur 2.14c/d de momenten- en dwarskrachtenlijn. De berekening wordt aan de lezer overgelaten.

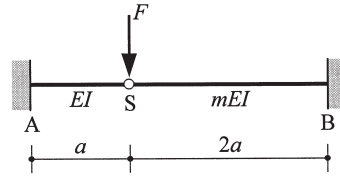
d. In figuur 2.15 zijn de aan figuur 2.14b ontleende oplegreacties nog eens getekend voor de constructie in zijn geheel.



Figuur 2.15 Oplegreacties.

2.2.4 Voorbeeld 4 – Een scharnierligger

De scharnierligger in figuur 2.16 bestaat uit de delen AS en BS die in A en B zijn ingeklemd en in S scharnierend met elkaar zijn verbonden. AS heeft een lengte a en buigstijfheid EI . BS heeft een lengte $2a$ en buigstijfheid mEI . De ligger wordt in S belast door de verticale kracht F .



Figuur 2.16 Een statisch onbepaalde scharnierligger. Met betrekking tot buiging is de ligger enkelvoudig statisch onbepaald.

Gevraagd:

- Toon aan dat de constructie enkelvoudig statisch onbepaald is als men alleen maar naar het geval van buiging kijkt.
- Kies een statisch bepaald hoofdsysteem voor het geval van buiging, kies de statisch onbepaalde en formuleer de aansluitvoorwaarden.
- Bereken de waarde van m waarbij de inklemmingsmomenten in A en B even groot zijn. Teken de bijbehorende momenten- en dwarskrachtenlijn.
- Bereken de waarde van m waarbij de dwarskrachten in AS en BS even groot zijn. Teken de bijbehorende momenten- en dwarskrachtenlijn.

Uitwerking:

- Met drie oplegreacties per inklemming zijn er in totaal $r = 2 \times 3 = 6$ onbekende oplegreacties. Het aantal onbekende verbindingskrachten in scharnier S is $v = 2$. Het totaal aantal onbekenden komt hiermee op $r + v = 6 + 2 = 8$.

Met drie evenwichtsvergelijkingen voor elk van de delen AS en BS beschikt men in totaal over $e = 2 \times 3 = 6$ evenwichtsvergelijkingen. Voor de graad van statisch onbepaaldheid n vindt men¹:

$$n = (r + v) - e = 8 - 6 = 2$$

De constructie is dus tweevoudig statisch onbepaald.

Bij rechte staven en ook bij in elkaars verlengde liggende rechte staven kunnen buiging en extensie gescheiden worden behandeld. Eén van de statisch onbepaalden in figuur 2.16 heeft betrekking op het geval van extensie; men kan hiervoor bijvoorbeeld de normaalkracht in de ligger kiezen. Voor het geval van buiging blijft de andere statisch onbepaalde over. Met betrekking tot buiging is de scharnierligger dus enkelvoudig statisch onbepaald.

¹ Zie TOEGEPASTE MECHANICA - deel 1, paragraaf 4.5.3.



Dit boek maakt deel uit van een serie mechanicastudieboeken voor de opleidingen Bouwkunde en Weg- en Waterbouwkunde (Civiele Techniek) in het hoger onderwijs (hbo en technische universiteit):

- *Mechanica: Evenwicht*
- *Mechanica: Spanningen, vervormingen, verplaatsingen*
- *Mechanica: Statisch onbepaalde constructies en Bezwijkanalyse*

Dit derde deel uit de serie is opgebouwd uit drie modules waarin drie min of meer op zichzelf staande onderwerpen worden behandeld:

- Module 1 – Statische onbepaalde constructies
- Module 2 – Bezwijkanalyse
- Module 3 – Symmetrie

Beide auteurs hebben jarenlange ervaring in het doceren en doseren van mechanica-onderwijs aan de opleiding Civiele Techniek van de Technische Universiteit Delft

De behandeling blijft beperkt tot staaf-constructies en handberekeningsmethoden. De theorie in de modules wordt ondersteund door vele figuren en voorbeelden, en is zo opgebouwd dat studenten de lesstof in principe zelfstandig door kunnen werken.

Net zoals de andere delen biedt ook dit boek een groot aantal uitgewerkte voorbeelden en vraagstukken die zodanig zijn gestructureerd dat het doorwerken ervan resulteert in een kennismaking met talrijke aspecten van dit vakgebied.

ISBN 978 90 395 2752 8

NUR 123



9 789039 527528 >

www.academic-service.nl